Übung 2

2.1 Ideales Gas

Für ein ideales Gas sind die beiden Zustandsgleichungen

$$\boxed{U = \tfrac{f}{2}Nk_bT\ (*) \quad , \quad PV = Nk_bT\ (**)}$$

experimentell gegeben. f ist hierbei die Zahl der Freiheitsgrade pro Molekül (Für ein einatomiges ideales Gas ist z.B. $f = 3$). Für eine adiabatische Zustandsänderung gilt

$$\boxed{dS = \tfrac{\delta Q}{T} = 0}$$

a) $zz : VT^{f/2} = const. \qquad und \qquad PV^{f+2}/2 = const..$
Wir gehen von der differentiellen Form der **Fundamentalbeziehung** aus

$$\boxed{dS = \tfrac{1}{T}dU + \tfrac{P}{T}dV - \tfrac{\mu}{T}dN}$$

Wir bilden nun das Differential von $(*)$ und lösen $(**)$ nach P auf und setzten dies in die Fundamentalbeziehung ein. Wir erhalten so

$$dS = \frac{1}{T}\left(\frac{f}{2}Nk_bdT + \frac{f}{2}k_bTdN\right) + \frac{Nk_bT}{TV}dV - \frac{\mu}{T}dN.$$

Da es sich hier um eine adiabatische Zustandsänderung handelt, wissen wir das $dN = 0$. Wir bekommen damit

$$dS = \frac{1}{T}\frac{f}{2}Nk_bdT + \frac{Nk_bT}{TV}dV$$

Diese Gleichung integrieren wir nun.

$$\int dS = \frac{f}{2}Nk_b\int_{T_0}^{T}\frac{dT}{T} + Nk_b\int_{V_0}^{V}\frac{dV}{V}.$$

Mit '$\int 0 = const.$' wird daraus:

$$\begin{aligned} const &= \frac{f}{2}Nk_b(\ln T - \ln T_0) + Nk_b(\ln V - \ln V_0) \\ &= Nk_b\left(\ln\left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{f}{2}} + \ln\left(\frac{V}{V_0}\right)\right) \\ &= Nk_b\ln\left(\left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{f}{2}}\frac{V}{V_0}\right) \end{aligned}$$

Mit $\ln x = const. \Rightarrow x = const.$, $T_0 = const.$ und $V_0 = const.$ folgt das Gewünschte:

$$T^{\frac{f}{2}}V = const.\ (+)$$

Löst man nun $(**)$ nach T auf ($T = \frac{PV}{Nk_b}$) setzt es in $(+)$ ein und bringt P und V auf eine Seite, erhällt man

$$\begin{aligned} T^{\frac{f}{2}}V &= const. \\ &= PV^{\frac{f}{2}}V \\ &= PV^{\frac{f+2}{2}} \end{aligned}$$

b) $zz.: S(U,V,N) = S_0\frac{N}{N_0} + Nk_b\left(\frac{f}{2}\ln\frac{U}{U_0} + \ln\frac{V}{V_0} - \frac{f+2}{2}\ln\frac{N}{N_0}\right)$ wobei S_0, U_0, V_0, N_0 Integrationskonstanten sind.

Wir überführen den 1. Hauptsatz der Thermodynamik in die molare Größen

$$\boxed{s = \frac{S}{N}, \quad du = \frac{U}{N}, \quad v = \frac{V}{N}.}$$

Wir erhalten unter Berücksichtigung der Tatsache, dass wir einen adiabatischen Prozess untersuchen, d.h. $dN = 0$, folgende Beziehung

$$\boxed{ds = \frac{1}{T}du + \frac{P}{T}dv.}$$

Nun löst man die ebenfalls in molaren Größen umgewandelten Gleichungen $(*)$ nach $\frac{1}{T}$ und $(**)$ nach $\frac{P}{T}$ auf und setzt beides in diese Gleichung ein. Man erhält so

$$ds = \frac{f}{2}k_b\frac{du}{u} + k_b\frac{dv}{v}$$

Mittels Inegration wird diese zu

$$s = s_0 + k_b\left(\left(\ln\frac{u}{u_0}\right)^{\frac{f}{2}} + \ln\frac{v}{v_0}\right)$$

Kehren wir nun zu den 'normalen Größen zurück, formen etwas um und erhalten das Geforderte.

$$\begin{aligned}
\frac{S(U,V,N)}{N} &= \frac{S_0}{N_0} + k_b\left(\left(\ln\frac{UN_0}{U_0N}\right)^{\frac{f}{2}} + \ln\frac{VN_0}{V_0N}\right)\\
&= \frac{S_0}{N_0} + k_b\left(\frac{f}{2}\ln\frac{U}{U_0} - \frac{f}{2}\ln\frac{N}{N_0} + \ln\frac{V}{V_0} - \ln\frac{N}{N_0}\right)\\
&= \frac{S_0}{N_0} + k_b\left(\frac{f}{2}\ln\frac{U}{U_0} + \ln\frac{V}{V_0} - \left(1+\frac{f}{2}\right)\ln\frac{N}{N_0}\right)\\
\Leftrightarrow S(U,V,N) &= S_0\frac{N}{N_0} + k_bN\left(\frac{f}{2}\ln\frac{U}{U_0} + \ln\frac{V}{V_0} - \frac{2+f}{2}\ln\frac{N}{N_0}\right)
\end{aligned}$$

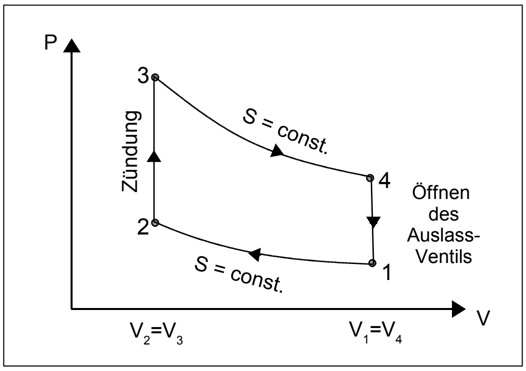

Abbildung 1: *Otto-Motor als Kreisprozess*

2.2 Otto-Motor

Der Otto-Verbrennungsmotor wird idealisiert durch folgenden Kreisprozess beschrieben (Abb. 1). Berechne

$$\eta = \frac{\Delta W}{\Delta Q_{23}}$$

in Abhängigkeit des Verdichtungsverhältnisses $\epsilon = \frac{V_1}{V_2}$.

Zuerst betrachten wir die einzelnen Prozesse

1 → 2 Adiabatischer Prozess, Volumen wird verringert, Druck wird verringert

2 → 3 Isochore Erwärmung

3 → 4 Adiabatische Expansion

4 → 1 Isochore Abkühlung

Die gesamte geleistete Arbeit beträgt

$$W_{34} - W_{21} = C_V(T_3 - T_4) - C_V(T_2 - T_1).$$

Über die Zugeführte Wärme können wir folgende Aussage treffen:

$$Q_{23} = C_V(T_3 - T_1).$$

So erhalten wir für die Effizienz:

$$\begin{aligned} \eta = \frac{\Delta W}{Q_{23}} &= \frac{T_3 - T_4 - (T_2 - T_1)}{T_3 - T_2} \\ &= 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2} \end{aligned}$$

Auf Grund der adiabatischen Zustandsänderung ist

$$V_1 T_1^{f/2} = V_2 T_2^{f/2} \qquad V_3 T_3^{f/2} = V_4 T_4^{f/2}$$

Mit $V_1 = V_4$ und $V_2 = V_3$ erhalten wir

$$V_1^{f/2}(T_4 - T_1) = V_2^{f/2}(T_3 - T_2)$$

setzt man dies in die letzte Formel ein, erhält man für die Effizienz

$$\eta = 1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{f/2} = 1 - \eta^{f/2}$$

2.3 Thermodynamische Potentiale und Legendre Transformation

Ist $f(x_i, ...)$ eine Funktion von n Variablen x_i. Bei der Legendre-Tranformation, ersetzt man x_i durch die Variable $y_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$ und erhält damit die Legendre-Tranaformierte

$$g(y_i) = f - y_i x_i.$$

a) Berechne die Legendre-Tranformierte von

$$f(x) = a + bx^2$$

und

$$g(x) = -\frac{1}{x}$$

wobei $x > 0$

$$y = \frac{\partial f(x)}{\partial x} = 2bx \Leftrightarrow x = \frac{y}{2b}$$

Wir erhalten damit für die Legendre-Transformierte

$$\tilde{f}(y) = a + b\left(\frac{y}{2b}\right)^2 - y * \frac{y}{2b} = a - \frac{y^2}{4b}$$

$$y = \frac{\partial g(x)}{\partial x} = \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{y^{1/2}}$$

Damit wird die Legendre-Transformierte

$$\tilde{g}(y) = -\frac{1}{\frac{1}{y^{1/2}}} - y \cdot \frac{1}{y^{1/2}} = -2y^{1/2}$$

zz.: $\tilde{\tilde{f}} = f$, d.h. f ist involutiv.

$$\begin{aligned}
\tilde{\tilde{f}} &= (f \,\tilde{-}\, xf') \\
&= (f - xf') - (-x)f' \\
&= f
\end{aligned}$$

b) *Diese Lösung ist momentan noch ein wenig dürftig. Ich habe quasi nur das aufgeschrieben, was wir in unserer Übungsgruppe dazu vermerkt haben.*

Aus $U(S, V, N)$ erhält man über Legendre-Transformationen die inneren Energien

$$\begin{aligned}
H &= U + PV & \frac{\partial U}{\partial V} &= -P \\
F &= U - TS & \frac{\partial U}{\partial S} &= T \\
G &= U + PV - TS
\end{aligned}$$