

# Übung 1

## 1.1 Maxwell-Relationen

Eine Funktion besitzt das exakte Differential

$$df = u(x, y)dx + v(x, y)dy$$

$$\text{zz: } \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_x = \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_y$$

Das exakte Differential ist gegeben durch

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x dy$$

woraus folgt

$$u(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y \quad v(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x$$

Es ist dann mit der Definition des exakten Integrals über die Vertauschbarkeit der Ableitungen

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_x &= \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y\right)_x \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x\right)_y \\ &= \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_y \end{aligned}$$

□

## 1.2 Wahrscheinlichkeitstheorie

- a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass von 10 Studenten mindestens zwei am gleichen Tag Geburtstag haben?

Es ist  $1 = P(\text{min2}) + P(\text{keiner})$ . Es bietet sich daher an, die Wahrscheinlichkeit zu berechnen, mit der keiner am gleichen Tag Geburtstag hat. Diese beträgt

$$P(\text{keiner}) = \frac{365}{365} \frac{364}{365} \frac{363}{365} \frac{362}{365} \frac{361}{365} \frac{360}{365} \frac{359}{365} \frac{358}{365} \frac{357}{365} \frac{356}{365} = 88.31\%$$

Also beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass von 10 Studenten mindestens zwei am gleichen Tag Geburtstag haben

$$P(\text{min2}) = 1 - P(\text{keiner}) = 11.69\%.$$

Bei wie vielen Studenten ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens zwei am gleichen Tag Geburtstag haben gerade 50% ? Wir berechnen dies iterativ:

$n = 12$	$P(\text{min2}) = 16.7\%$
$n = 20$	$P(\text{min2}) = 41.12\%$
$n = 21$	$P(\text{min2}) = 44.37\%$
$n = 22$	$P(\text{min2}) = 47.57\%$
$n = 23$	$P(\text{min2}) = 50.73\%$

Die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens zwei Studenten am gleichen Tag Geburtstag haben, beträgt bei genau 23 Studenten ungefähr 50%.

- b) Man zieht nacheinander drei Karten aus einem 32-er Stapel. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die dritte Karte eine Dame ist?

Veranschaulichung des Problem mittels eines Baumdiagramms:

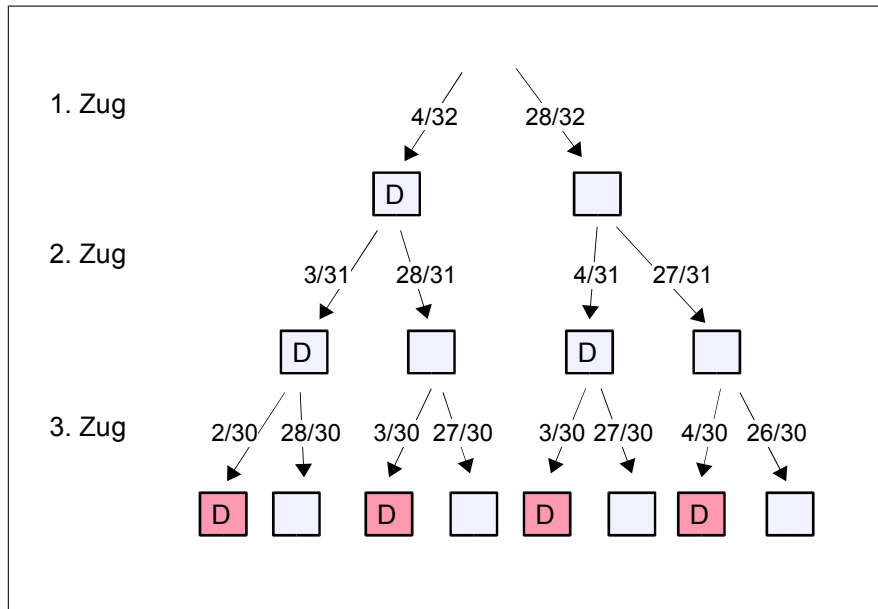


Abbildung 1: Baumdiagramm: Wahrscheinlichkeit 3 Karte ist eine Dame

Die rot endenden Pfade stehen hierbei für die positiven Ergebnisse. Man erhält nun die Wahrscheinlichkeit für den Zug einer Dame als dritte Karte, in dem man die einzelnen Wahrscheinlichkeiten der positiven Pfade summiert. Diese Wahrscheinlichkeiten sind ein Produkt der einzelnen Wahrscheinlichkeiten der Züge 1-3. Man erhält so:

$$\begin{aligned}
 P(3. \text{Zug} = \text{Dame}) &= P(D, D, D) + P(D, x, D) + P(x, D, D) + P(x, x, D) \\
 &= \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{32 \cdot 31 \cdot 30} + \frac{4 \cdot 3 \cdot 28}{32 \cdot 31 \cdot 30} + \frac{4 \cdot 3 \cdot 28}{32 \cdot 31 \cdot 30} + \frac{4 \cdot 28 \cdot 27}{32 \cdot 31 \cdot 30} \\
 &= 12.5\%
 \end{aligned}$$

Man zieht acht Karten aus einem 52-er Stapel. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass vier Karten Asse und zwei Karten Könige sind, bzw. min. eine Karte ein As ist?

Dem zu Grunde liegt ein Problem der ungeordneten Ziehung von  $r$  Elemente aus  $n$  Elementen, für welche gilt: Es gibt

$$\frac{n!}{(n-r)!r!}$$

Kombinationen, wenn man  $r$  Elemente ungeordnet aus einer Menge von  $n$  Elementen zieht.

Somit erhalten wir für die Wahrscheinlichkeit, dass vier Assen und zwei Könige gezogen werden:

$$P(4A + 2K) = \frac{1}{\frac{52!}{(52-8)!}} \left( \underbrace{1}_{4A} \cdot \underbrace{\frac{4!}{(4-2)!}}_{2K} \cdot \underbrace{\frac{44!}{(44-2)!}}_{2 \text{ weitere Karten}} \right) = 8.25 \cdot 10^{-6}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eine Karte ein Ass ist, beträgt somit

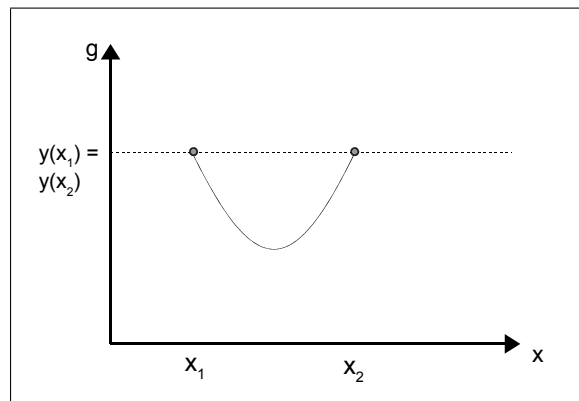
$$\begin{aligned} P(\min 1A) &= \frac{1}{\frac{52!}{(52-8)!}} \left( \frac{4!}{(4-1)!} \cdot \frac{48!}{(48-7)!} + \frac{4!}{(4-2)!} \cdot \frac{48!}{(48-6)!} \right. \\ &\quad \left. + \frac{4!}{(4-3)!} \cdot \frac{48!}{(48-5)!} + \frac{48!}{(48-4)!} \right) \\ &= 49.86\% \quad (\text{ohne Gewähr!}) \end{aligned}$$

### 1.3 Physikalisches System mit Nebenbedingungen (unvollständige Lösung)

*Diese Lösung ist in keiner Weise vollständig. Ich habe sie bis jetzt noch nicht selbst durchgerechnet sondern nur abgeschrieben.*

- a) Kettenlinie: Ein Seil werde an zwei Punkten (in gleicher Höhe) im Schwerfeld aufgehängt. Durch welche Kurve wird die Gleichgewichtslage des Seils beschrieben?

Das Seil stellt sich so ein, dass seine potentielle Energie minimal wird. Betrachte Abbildung 2 Die



**Abbildung 2:** Baumdiagramm: Seil im Schwerfeld

Gleichgewichtsbedingung ist

$$\begin{aligned} E_{pot} &= \int_1^2 dm gy \\ &= \int_1^2 ds dy \rho g \\ &= \int_{x_1}^{x_2} dx y \sqrt{1 + y'^2} \rho g \\ &\stackrel{!}{=} \min \end{aligned}$$

Als Nebenbedingung haben wir hier die Länge des Seils, welche sich nicht verändert. Es gilt damit

$$L = \int_{x_1}^{x_2} dx \sqrt{1 + y'^2} = \text{const.}$$

**Methode der Lagrange-Multiplikatoren** Wir erhalten ein neues Funktional wie folgt:

$$H = \int_{x_1}^{x_2} dx E(x, y, y') = \int_{x_1}^{x_2} dx (F - \lambda G) = \int_{x_1}^{x_2} dx (\rho g y - \lambda) \sqrt{1 + y'^2}$$

Die Euler-Lagrange-Gleichung ist

$$\frac{dE_{y'}}{dx} = E_y$$

wobei  $E$   $x$  nicht explizit enthält. Daraus folgt

$$\begin{aligned} E_{y'} - E &= \text{const} =: C \\ \Leftrightarrow \frac{(\rho g y - \lambda) y'^2}{\sqrt{1 + y'^2}} - (\rho g y - \lambda) \sqrt{1 + y'^2} &= \frac{(\rho g y - \lambda)}{\sqrt{1 + y'^2}} = C \\ \Leftrightarrow y' &= \frac{\rho^2 g^2}{C^2} \sqrt{\left(y - \frac{\lambda}{\rho^2 g^2}\right)^2 - 1} \\ \Leftrightarrow y(x) &= \frac{\lambda}{\rho^2 g^2} + \frac{C^2}{\rho^2 g^2} \cosh\left(\frac{x \rho^2 g^2}{C^2} + b\right) \end{aligned}$$

Mit  $y(x_1) = y(x_2)$  ergibt sich  $b = 0$ , spezielle Koordinatenwahl der Aufhängungspunkte erlaubt,  $\lambda$  zu berechnen und  $a$  kann durch die Nebenbedingung festgelegt werden.

- b) Zu minimieren  $E(\psi) = \langle \psi | H | \psi \rangle$  mit der Nebenbedingung  $F(\psi) = \langle \psi | \psi \rangle - 1 = 0$ . Es existiert ein Lagrange-Multiplikator  $\lambda$  so dass

$$E'(\psi) - \lambda F'(\psi) = 0$$

Ist  $E(\psi)$  minimal, ist  $H$  symmetrisch. Es gilt dann

$$E'(\psi) = 2\langle \psi | H, \quad F'(\psi) = 2\langle \psi |$$

d.h.

$$2\langle \psi | H = 2\lambda \langle \psi |, \quad H | \psi \rangle = \lambda | \psi \rangle$$

und wegen  $\langle \psi | \psi \rangle = 1$  folgt

$$\lambda = \lambda \langle \psi | \psi \rangle = \langle \psi | H | \psi \rangle = E(\psi) = \min.$$

Daraus folgt, dass jede Minimalstelle  $\psi$  von  $E$  für  $\langle \psi | \psi \rangle = 1$  gerade ein Eigenvektor von  $H$  ist.  $E(\psi) = \min$  ist somit Eigenwert zu  $\psi$ .

$$\Rightarrow E_0 = \{\psi\}^{\min}, \lambda \langle \psi | H - \lambda | \psi \rangle + \lambda$$